Μιγαδικές 19/5/16

Θεμελιώδες Θεώρημα SOS (ΘΕΜΑ).

$p(z)=a_0+a_1z+a_2z^2+\dots+a_\nu z^\nu,\quad a_\nu\neq 0 \quad \nu\geq 1.$

$\exists\, z_0\in\mathbb{C}: p(z_0)=0$

Απόδειξη: Έστω ότι δεν υπάρχει δηλ $\forall z\in\mathbb{C}: p(z)\neq 0$

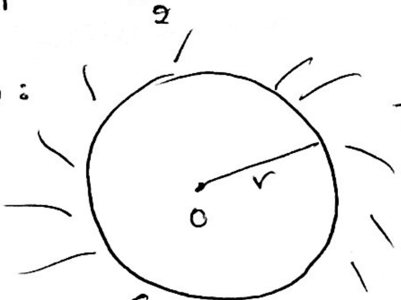
$f(z)=\frac{1}{p(z)},\ z\in\mathbb{C}$

Παίρνω το πολυώνυμο $p(z)=z^\nu\left(a_\nu+\frac{a_{\nu-1}}{z}+\frac{a_{\nu-2}}{z}+\dots+\frac{a_0}{z^\nu}\right)$

$$|p(z)|=|z|^\nu\left(|a_\nu|-\frac{|a_{\nu-1}|}{|z|}-\frac{|a_{\nu-2}|}{|z|^2}-\dots-\frac{|a_0|}{|z|^\nu}\right)$$

$$\frac{|a_{\nu-1}|}{|z|}+\frac{|a_{\nu-2}|}{|z|^2}+\dots+\frac{|a_0|}{|z|^\nu}<\frac{|a_\nu|}{2}$$

Οπότε μπορώ να βρω δίσκο:



$\exists\, r>0: |z|\geq r$

→ φράγμα έξω από τον δίσκο

$$|z|\geq r:\ |f(z)|\leq \frac{1}{|z|^\nu|a_\nu|-\frac{|a_\nu|}{2}}=\frac{1}{|z|^\nu\frac{|a_\nu|}{2}}=\frac{2}{|z|^\nu|a_\nu|}\leq \frac{2}{r^\nu|a_\nu|}$$

Έξω από το δίσκο έχει φράγμα. και μέσα έχει φράγμα γτ. ο δίσκος εί[ναι] συμπαγές σύνολο. και η συνάρτηση συνεχής άρα έχω μέγιστο.

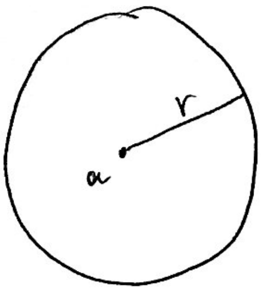
$$\max\left\{\max_{|z|\leq r}|f(z)|,\ \frac{2}{r^\nu|a_\nu|}\right\}=:M:\quad |f(z)|\leq M\quad \forall z\in\mathbb{C}$$

→ φραγμένη και ακέραια άρα σταθερή.

Οπότε η f πρέπει να είναι σταθερή. Άτοπο γιατί ο παρονομαστής σταθερός.

$$\frac{p(z)}{z-z_0}=\frac{(z-z_0)^k g(z)}{z-z_0}=(z-z_0)^{k-1}g(z).$$

$f: \Delta(a,0,r) \longrightarrow \mathbb{C}$



1) $\exists \lim_{a} f \in \mathbb{C} \Rightarrow \exists F: B(a,r)$ <u>όπου</u>:

$F(z)=f(z),\ z \in \Delta(a,0,r)$

2) $\exists \lim_{a} f = \infty$: a <u>πόλος</u> : $f(z)=(z-a)^{-k} g(z)$

δεν απειρίζεται στο α

3) $\nexists \lim_{a} f$: <u>ουσιωδώς ανώμαλο σημείο</u>.

Μερόμορφη : $f: \mathbb{C} \to \mathbb{C}$: $\nexists$ ουσ. αν. σημεία.

f, g

$f+g=h$

1) Αν το z σημ. ολομ. f κ' g.

Άρα και το κοινό παραγωγίζεται.

Το ίδιο συμβαίνει και με την διαφορά, πολ/μό, κ' πηλίκο.

Έστω τώρα ότι η μία ολόμορφη και z σημείο ολομορ. της f και πόλος της g.

2) $h(z)=f(z)+g(z) \Rightarrow z_0$ πόλος της h. γιατί το όριο είναι άπειρο

$h(z)=f(z)\cdot g(z)$. $f(z_0)\neq 0$: z_0 πόλος αν $f(z_0)=0$ τότε z_0 ρίζα οπότε γράφεται:

$$h(z)=f(z)\cdot g(z)=(z-z_0)^{\lambda}\cdot m(z)\cdot(z-z_0)^{-\nu}n(z)=(z-z_0)^{\lambda-\nu}m(z)\cdot n(z)$$

Αν $\lambda\geq\nu$ τότε z_0 ρίζα της h άρα σημείο ολομορφίας

Αν $\lambda<\nu$ z_0 πόλος γιατί ο εκθέτης αρνητικός

Αν $\lambda=\nu$ σημείο ολομορφίας.

3) Αν είναι πόλος και για τις δύο. τότε:

$f(z)=(z-z_0)^{-k}m(z)$

$g(z)=(z-z_0)^{-\lambda}n(z)$

$f(z)\cdot g(z)=(z-z_0)^{-(k+\lambda)}\cdot m(z)\cdot n(z)$.

$$h(z)=\frac{f(z)}{g(z)}$$

z_0 σημείο ολομ. της f,g.

$g(z_0)\neq 0$ το σημ. ολομ. της h.

$g(z_0)=0 \Rightarrow g(z)=(z-z_0)^{k}m(z)$

$$h(z)=(z-z_0)^{-k}\frac{f(z)}{m(z)}$$

Είναι ή σημείο ολομ. ή πόλος $\Rightarrow$ η μερόμορφη.

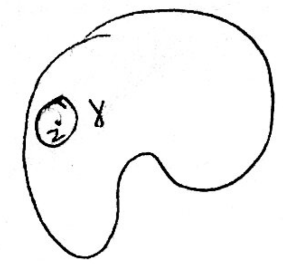
Π.χ. $$f(z)=\frac{1-\sigma\upsilon\nu z}{z^2-(\eta\mu z)^2}=\frac{\frac{z^2}{2!}-\frac{z^4}{4!}+\cdots}{z^4\cdot k(z)}=z^{-2}\frac{\frac{1}{2!}-+\cdots}{k(z)}$$

$z=0$.

$f(0)=\frac{0}{0}$

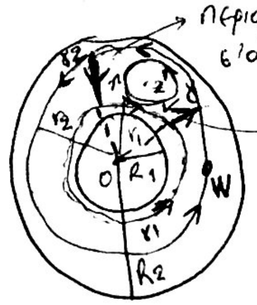
$(z-\eta\mu(z))(z+\eta\mu(z))$

Caushy παράσταση ολόμορφης συνάρτησης



$$f(z)=\frac{1}{2\pi i}\int_{\gamma}\frac{f(w)}{w-z}\,dw.$$

$\Delta(0;R_1,R_2)$ ολόμορφη συνάρτηση



$$f(z)=\frac{1}{2\pi i}\int_{\gamma}\frac{f(w)}{w-z}\,dw=\frac{1}{2\pi i}\int_{\Gamma_1}\frac{f(w)}{w-z}\,dw=*$$

περιορίζομαι σ'αυτό το κομμάτι

αναιρούνται

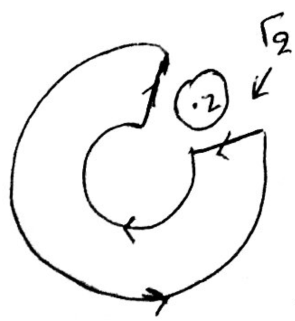
Έχω επιλέξει, $R_1<r_1<r_2<R_2$

Παίρνω δύο ακτίνες και προσανατολίζω θετικά τη καμπύλη

$$\Gamma_1+\Gamma_2=\gamma_2-\gamma_1 \Rightarrow \Gamma_1=\gamma_2-\gamma_1-\Gamma_2$$

ομοτοπικές καμπύλες.

$$*=\frac{1}{2\pi i}\int_{\gamma_2}\frac{f(w)}{w-z}\,dw-\frac{1}{2\pi i}\int_{\gamma_1}\frac{f(w)}{w-z}\,dw-\cancel{\frac{1}{2\pi i}\int_{\Gamma_2}\frac{f(w)}{w-z}\,dw}^{\,0}$$



Τι σχέση έχουν; γιατί Γ_2 έχει το z απ' έξω

Είναι ολόμορφη η Γ_2, η καμπύλη κλειστή.

$\underline{w\in\gamma_2}:\ \left|\frac{z}{w}\right|<1 \qquad \frac{f(w)}{w-z}=\frac{f(w)}{w\left(1-\frac{z}{w}\right)}=\frac{f(w)}{w\underbrace{\left(1-\frac{z}{w}\right)}_{\theta}}$

$$\frac{1}{w}f(w)\sum_{\nu=0}^{+\infty}\left(\frac{z}{w}\right)^{\nu}=\sum_{\nu=0}^{+\infty}\frac{f(w)}{w^{\nu+1}}z^{\nu}$$

$w \in \gamma_1 \quad \left|\frac{w}{z}\right| < 1 : \quad \frac{-f(w)}{w-z} = \frac{-f(w)}{z\left(\frac{w}{z}-1\right)} = \frac{f(w)}{z\left(1-\frac{w}{z}\right)} = \frac{1}{z} f(w) \sum_{v=0}^{+\infty} \frac{w^v}{z^v} = \sum_{v=0}^{+\infty} \frac{f(w)}{z^{v+1}} w^v$

$$f(z) = -\frac{1}{2\pi i}\int_{\gamma_1} \frac{f(w)}{w-z}\,dw + \frac{1}{2\pi i}\int_{\gamma_2} \frac{f(w)}{w-z}\,dw = \frac{1}{2\pi i}\int_{\gamma_1} \sum_{v=0}^{+\infty} \frac{f(w)}{z^{v+1}} w^v\,dw +$$

$$+ \frac{1}{2\pi i}\int_{\gamma_2} \sum_{v=0}^{+\infty} \frac{f(w)}{w^{v+1}} z^v\,dw$$

Η σειρά συγκλίνει ομοιόμορφα οπότε τα $\int$ολοκλ. μπορούν να μπουν μες τη σειρά!

$$= \sum_{k=-\infty}^{-1} \left(\frac{1}{2\pi i}\int_{\gamma_1} \frac{f(w)}{w^{k+1}}\,dw\right)\cdot z^k + \sum_{v=0}^{+\infty} \left(\frac{1}{2\pi i}\int_{\gamma_2} \frac{f(w)}{w^{v+1}}\,dw\right)\cdot z^v =$$

θέτω

$v+1=-k$

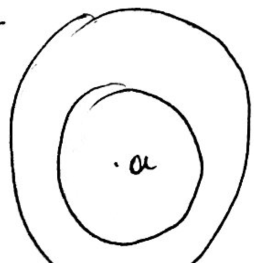
$v=-k-1$

η γ_1 είναι ομοτοπική ως προς την γ_2.

$$= \sum_{v=-\infty}^{+\infty} \left(\frac{1}{2\pi i}\int_{\gamma_1} \frac{f(w)}{w^{v+1}}\,dw\right) z^v = \boxed{\sum_{v=-\infty}^{+\infty} b_v z^v}$$

Ανάπτυγμα της συνάρτησης σε σειρά Laurent.

Π.χ.



~~αν αλλάξω~~

$z - a = \zeta$

$$f(z) = \sum_{v=-\infty}^{+\infty} b_v (z-a)^v$$

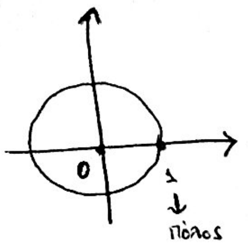
Αναλυτικά

$$f(z) = \dots + \underbrace{\frac{b_{-v}}{(z-a)^v} + \frac{b_{-v+1}}{(z-a)^{v-1}} + \dots + \frac{b_{-1}}{z-a}}_{\text{κανονικό}} + \underbrace{b_0 + b_1(z-a) + \dots + b_k(z-a)^k}_{\text{Ολόμορφο μέρος.}}$$

Αν υποθέσω ότι το a είναι σημείο ολομορφίας. Θα μπορούσα στο ανάπτυγμα της f να έχω αυτόν τον παράγοντα; Όχι δεν θα υπάρχει αυτό το κομμάτι.

Παραδ.

$$f(z) = \frac{1}{z(z-1)}$$ Θέλω να βρω το ανάπτυγμα με κέντρο $z=0$



$$f(z) = \sum_{\nu=-\infty}^{+\infty} b_\nu z^\nu$$

Ξεπερνώντας το 1 έχω άλλο δακτύλιο

1) $\Delta(0; 0, 1)$ $|z|<1$

2) $\Delta(0; 1, +\infty)$ $|z|>1$ και $\left|\frac{1}{z}\right|<1$.

1) Η συνάρτηση δεν είναι ολόμορφη.

Τη διασπώ $f(z) = \frac{1}{z(z-1)} = \frac{a}{z} + \frac{b}{z-1} = \frac{(a+b)\cdot z - a}{z(z-1)}$

$a+b=0 \Rightarrow b=1$ Οπότε γράφεται:

$-a=1 \Rightarrow a=-1$

Είναι ανεπτυγμένο σε σειρά Laurent.

$$f(z) = \frac{-1}{z} + \frac{1}{z-1} = -\frac{1}{z} - \frac{1}{1-z} = -\frac{1}{z} - (1+z+z^2+\dots)$$

$$= -\frac{1}{z} - 1 - z - z^2 - z^3 - \dots$$

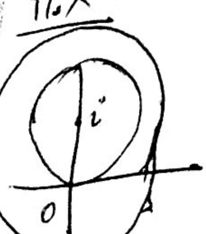
2) $$f(z) = -\frac{1}{z} + \frac{1}{z-1} = -\frac{1}{z} + \frac{\frac{1}{z}}{1-\frac{1}{z}} = -\frac{1}{z} + \frac{1}{z}\cdot\sum_{\nu=0}^{+\infty}\left(\frac{1}{z}\right)^\nu = -\frac{1}{z} + \sum_{\nu=0}^{+\infty}\frac{1}{z^{\nu+1}}$$

$$= \dots \frac{1}{z^3} + \frac{1}{z^2}$$

Πεδίο ορισμού

$\zeta = \mathbb{C} \setminus [0,1]$.

Π.χ



$$f(z) = \sum_{\nu=0}^{+\infty} b_\nu (z-i)^\nu$$

1) $B(i, 1)$ μόνο ολόμορφο μέρος $\frac{1}{z(z-1)} = \frac{-1}{z} + \frac{1}{z-1} = \frac{-1}{z-i+i} + \frac{1}{z-(-1+i}$

ολομικ' ταιν. 2) $\Delta(i; 1, \sqrt{2})$

μόνο κανονικό 3) $\Delta(i, \sqrt{2}, +\infty)$

$$= \frac{-1}{i\left(1+\frac{z-i}{i}\right)} + \frac{1}{1-i}\left(\frac{1}{1-\frac{z-i}{1-i}}\right)$$

$$= \frac{-1}{i}\sum\frac{(z-i)^\nu}{i^\nu}\cdot(-1)^\nu + \frac{1}{1-i}\sum\frac{(z-i)^\nu}{(1-i)^\nu}$$